VECTORES

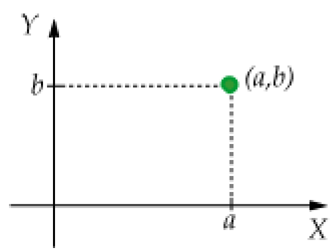
Los vectores, que eran utilizados en mecánica en la composición de fuerzas y velocidades ya desde fines del siglo XVII, no tuvieron repercusión entre los matemáticos hasta el siglo XIX cuando Gauss usa implícitamente la suma vectorial en la representación geométrica de los números complejos en el plano y cuando Bellavitis desarrolla sus "equipolencias", un conjunto de operaciones con cantidades dirigidas que equivale al cálculo vectorial de hoy.

El paso siguiente lo da Hamilton. Con Hamilton inicia el estudio de los vectores. Se le debe a él el nombre de 'vector' producto de la creación de un sistema de números complejos de cuatro unidades, denominado "cuaterniones", muy usados hoy en día para el trabajo con rotaciones de objetos en el espacio 3D. Actualmente, casi todas las áreas de la física son representadas por medio del lenguaje de los vectores.

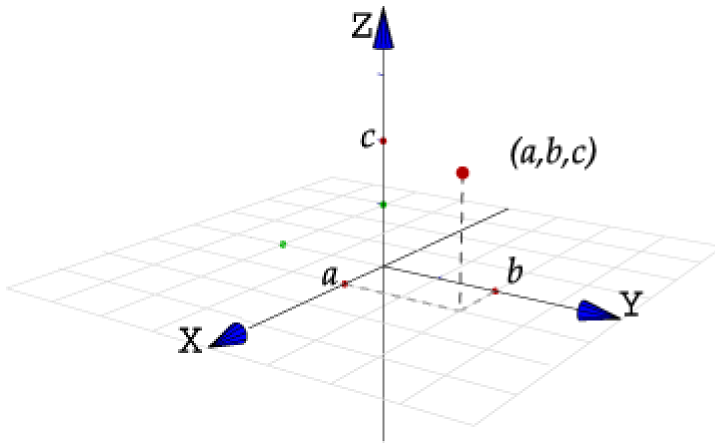
En este tema, estudiaremos los vectores en $\mathbb{R}^n$, las operaciones y sus propiedades. Además de algunos ejemplos, se desarrollan actividades interactivas en 3D para facilitar la apropiación de los conceptos estudiados.

Vectores

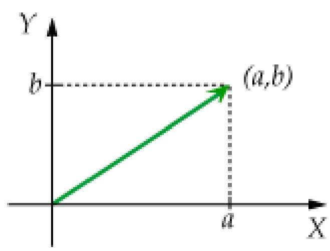
A partir de la representación de $\mathbb{R}$, como una recta numérica, los elementos $(a,b) \in R^2$ se asocian con puntos de un plano definido por dos rectas perpendiculares que al mismo tiempo definen un sistema de coordenadas rectangulares donde la intersección representa a (0 , 0) y cada (a , b) se asocia con un punto de coordenada a en la recta horizontal (eje X) y la coordenada b en la recta vertical (eje Y).

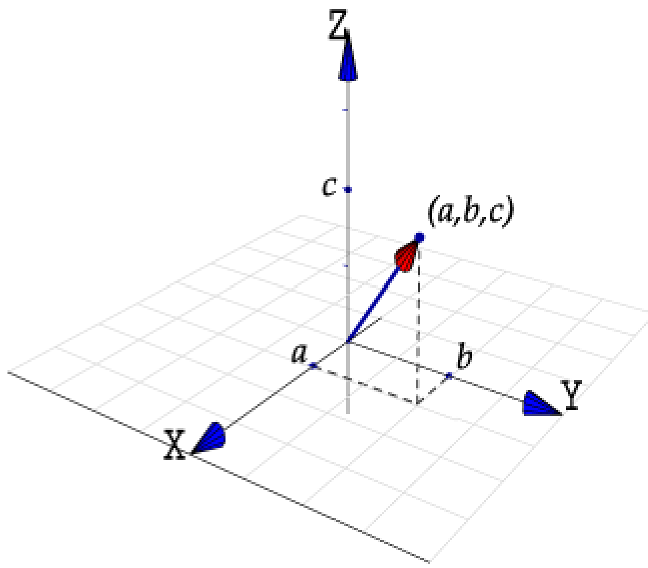


Análogamente, los elementos $(a,b,c) \in R^3$ se asocian con puntos en el espacio tridimensional definido con tres rectas mutuamente perpendiculares. Estas rectas forman los ejes del sistema de coordenadas rectangulares (ejes X, Y y Z).



Los vectores se pueden representar mediante segmentos de recta dirigidos, o flechas, en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$. La dirección de la flecha indica la dirección del vector y la longitud de la flecha determina su magnitud.

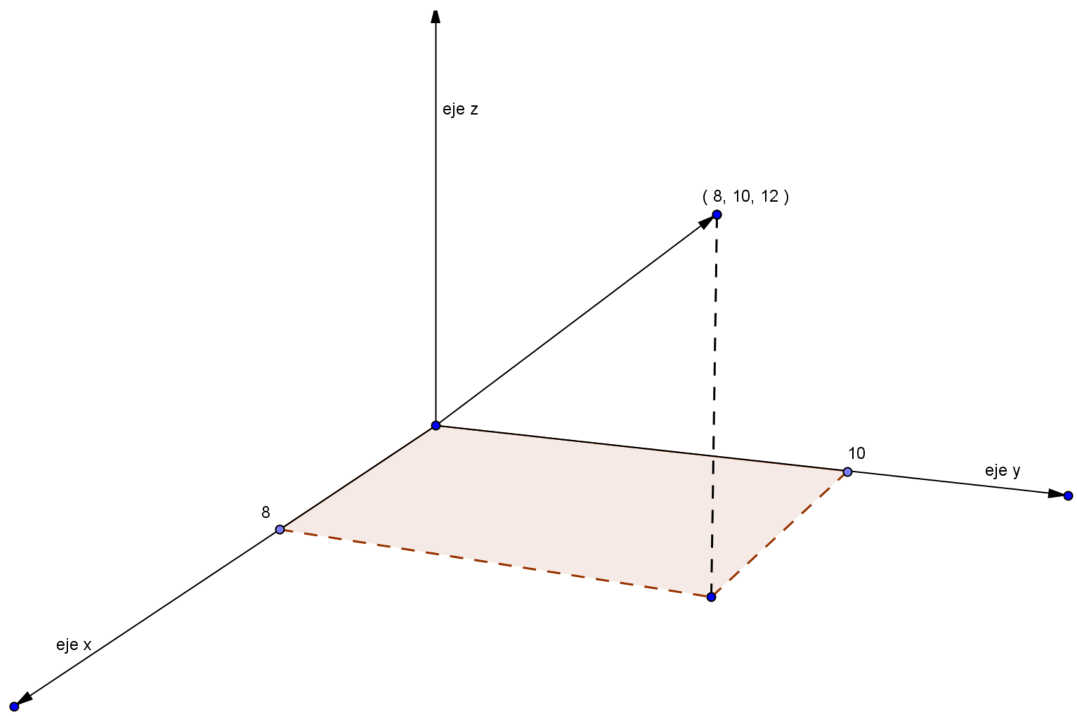




Vector en el plano   vector en el espacio

Ejemplo graficar el vector: $\vec{u} = \langle 8,10,12 \rangle$ para ello:

1) Localicemos en el plano xy el punto (8 , 10) y sobre este punto ubicamos 12 en el eje z
2) Unimos mediante un segmento dirigido el punto (0 , 0 , 0) y (8 , 10 , 12)



Notación

Los vectores se denotarán con letras minúsculas con un flecha arriba tales como $\vec{v}$, $\vec{z}$. Los puntos se denotarán con letras mayúsculas tales como A, B, C. En el contexto de los vectores, los números reales serán llamados *escalares* y se denotarán con letras minúsculas cursivas tales como α ,β,λ , k.

- Si el punto inicial de un vector $\vec{v}$ es A y el punto final es B, entonces $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$
- El vector nulo se denota con $\vec{0} = \langle 0,0,0,......., 0\rangle$

Un vector en el $\mathbb{R}^n$ es un enuple de números reales $\langle x_1, x_2, x_3, \ldots. x_n\rangle$, $x_i \in R$. A cada x_i se le llama componente i-ésima del vector.

Un vector en R^3 tiene la forma $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$

Un vector en R^4 tiene la forma $\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$

Un vector en R^6 tiene la forma $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \rangle$

Los vectores en el espacio generalmente los denotamos en la forma $\langle x, y, z \rangle$

Operaciones Básicas

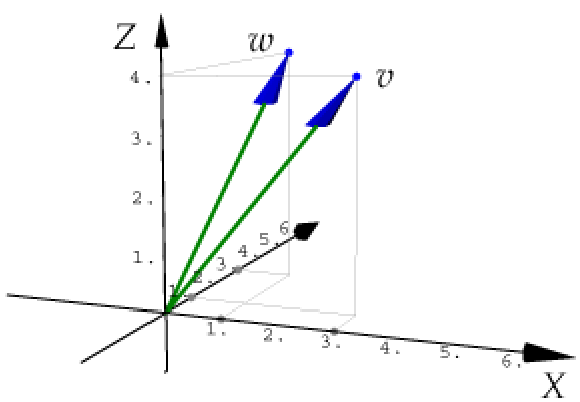
Igualdad

Dos vectores son iguales si tienen, en el mismo orden, las mismas componentes.

Consideremos los vectores $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n)$ y $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_n)$. Decimos que $\vec{X} = \vec{Y}$ si y sólo si. $x_i = y_i$ para cada $i = 1,2,3\ldots,n$

EJEMPLO 1

Sean los vectores $v = \langle 1,3,4 \rangle$; $w = \langle 3,1,4 \rangle$, entonces $v \neq w$ ya cada componente correspondiente es diferente, así la componente en x del vector v es 1 y la del vector w es 3. Haga la representación grafica de los vectores.



Nota. Dados dos vectores, si una de las componentes correspondientes es diferentes los vectores no son iguales, así los vectores $v = \langle -1,3,4 \rangle$ *;* $w = \langle 1,3,4 \rangle$ son diferentes ya que tienen diferente la primera componente.

OPERACIONES CON VECTORES.

Suma y resta

La suma y resta de vectores se hace componente a componente. Para sumar vectores se debe tener en cuenta que estos pertenezcan al mismo espacio vectorial.

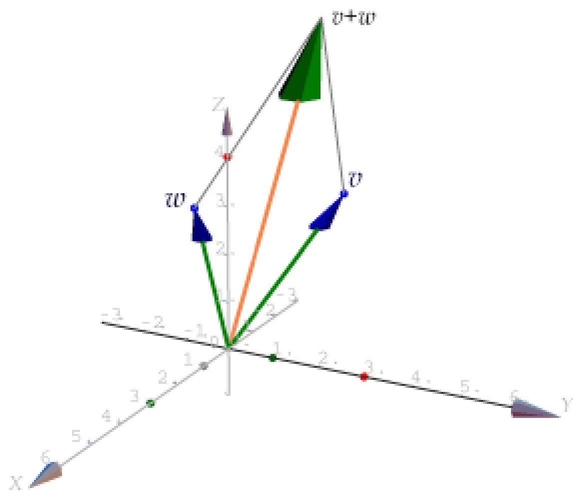
Consideremos los vectores $\vec{v} = \langle v_1, v_2, \ldots\ldots v_n \rangle \in R^n$ *y* $\vec{w} = \langle w_1, w_2, \ldots\ldots w_n \rangle \in R^n$ *.*

$$\vec{v} + \vec{w} = \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots\ldots v_n + w_n \rangle$$

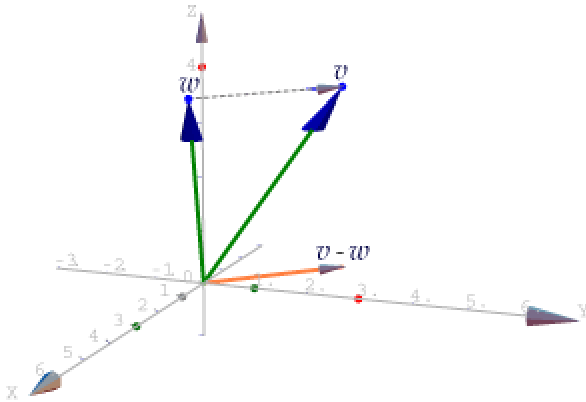
$$\vec{v} - \vec{w} = \langle v_1 - w_1, v_2 - w_2, \ldots\ldots v_n - w_n \rangle$$

EJEMPLO 2 Sea $\vec{v} = \langle 1,3,4 \rangle$ y $\vec{w} = \langle 3,1,4 \rangle$, entonces

$$\vec{v} + \vec{w} = \langle 1+3, 3+1, 4+4 \rangle = \langle 4,4,8 \rangle$$



$$\vec{v}-\vec{w}=\langle 1-3,3-1,4-4\rangle=\langle -2,2,0\rangle$$



Multiplicación por un escalar .cuando multiplicamos un vector cualquiera de un espacio vectorial por un escalar k, se multiplica cada componente del vector por el valor del escalar. El resultado es un vector que va a tener la misma dirección del vector dado y cuyo modulo es k veces el modulo del vector dado.

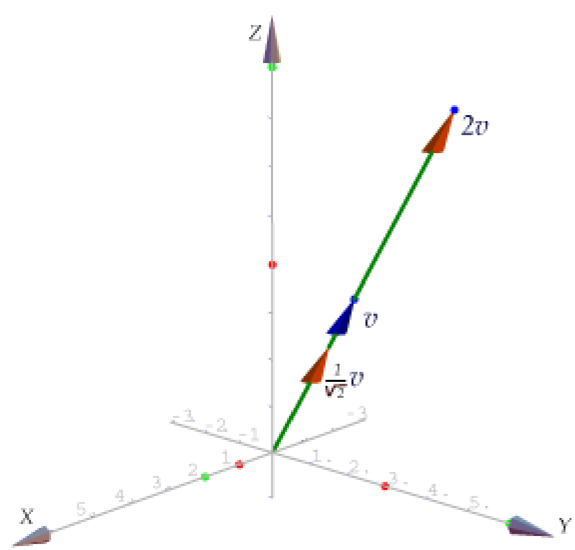
Consideremos el vector $\vec{v}=\langle v_1,v_2,.....v_n\rangle\in R^n$ y el escalar $k\in R$, entonces

$$k\,\vec{v}=\langle kv_1,kv_2,.....kv_n\rangle\in R^n$$

EJEMPLO 3 *Sea* $\vec{v}=\langle 1,3,4\rangle$ un vector en el espacio tridimensional, entonces

Si k = 2 , se tiene que

$$k\,\vec{v}=2\,\vec{v}=2\langle 1,3,4\rangle$$
$$=\langle 2*1,2*3,2*4\rangle$$
$$=\langle 2,6,8\rangle$$



Propiedades de los vectores

Consideremos el vector $\vec{v},\vec{u},\vec{w}\in R^n$ y $\alpha,\beta\in R$ entonces

$\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{v}+\overrightarrow{-v}=\vec{0}$

$0\,\vec{v}=\vec{0}$ $\qquad$ $1\,\vec{v}=\vec{v}$

$\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$ $\qquad$ $(\vec{v}+\vec{w})+\vec{u}=\vec{v}+(\vec{w}+\vec{u})$

$\alpha(\vec{v}+\vec{w})=\alpha\vec{v}+\alpha\vec{w}$ $\qquad$ $(\alpha+\beta)\,\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}$ $\qquad$ $(\alpha\beta)\,\vec{v}=\alpha(\beta\vec{v})$

NORMA, MODULO, MAGNITUD DE UN VEC TOR

Consideremos el vector $\vec{v}=\langle v_1,v_2,.....v_n\rangle\in R^n$ y el escalar $k\in R$, entonces se define la norma del vector, denotada por $\left\|\vec{v}\right\|$ como la distancia que hay desde origen del vector hasta su punto terminal, si el origen del vector coincide con el origen del sistema cartesiano se tiene

$$\left\|\vec{v}\right\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2+.....+v_n^2}$$

Asi, el modulo del vector $\vec{v}=\langle 3,-2,4,2\rangle$ es igual a

$$\left\|\vec{v}\right\|=\sqrt{3^2+(-2)^2+4^2+2^2}=\sqrt{9+4+16+4}=\sqrt{33}$$

Producto punto y norma

El producto punto (o escalar) es una operación entre vectores cuyo resultado siempre es un escalar. Esta operación es introducida para expresar algebraicamente la idea geométrica de magnitud.

Si conocemos los módulos de los vectores $\vec{v}$, $\vec{w}$ y el ángulo θ entre ellos, se define el producto punto como el escalar

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \|v\|\|w\| Cos\theta$$

Cuando se conocen las componentes de los vectores $\vec{v} = \langle v_1, v_2, ... v_n \rangle$ y $\vec{w} = \langle w_1, w_2, ... w_n \rangle$ pertenecientes al espacio vectorial R^n. El producto punto (o escalar) $\vec{v} \cdot \vec{w}$ se define de la siguiente manera

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + ... + v_n w_n$$

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

Nota ; sea el vector $\vec{v} = \langle v_1, v_2, ... v_n \rangle$ entonces

$$\vec{v} \bullet \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geq 0$$

Propiedades del producto punto

Consideremos los vectores $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in R^n$ y $\alpha \in R$ entonces

$\vec{v} \bullet \vec{0} = 0$ $\vec{v} \bullet \vec{w} = \vec{w} \bullet \vec{v}$ $\vec{u} \bullet \left(\vec{v} + \vec{w} \right) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$

$\vec{u} \bullet \left(\alpha \vec{v} \right) = \alpha \left(\vec{u} \bullet \vec{v} \right)$

- **Observación**: NO hay propiedad asociativa pues, $\vec{v} \cdot \left(\vec{w} \cdot \vec{u} \right)$ no tiene sentido dado que $\vec{w} \cdot \vec{u}$ es un número real.

VECTOR UNITARIO

Un vector se dice unitario si su norma es 1.

Asi por ejemplo. El vector $\vec{v} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$ es un vector unitario puesto que

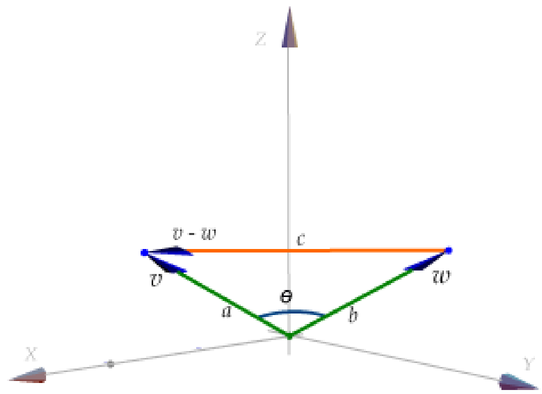
$$\left\| \vec{v} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Si $\vec{v}$ es un vector diferente del vector cero, entonces un vector unitario en la dirección del vector $\vec{v}$, se define como el vector $\vec{v}$ divido en el modulo de $\vec{v}$: $\vec{U}_v = \frac{v}{\|v\|}$

Los vectores $\vec{i} = \langle 1,0,0 \rangle, \vec{i} = \langle 0,1,0 \rangle, \vec{i} = \langle 0,0,1 \rangle$ son vectores unitarios en la dirección de los ejes coordenados.

Ángulo entre vectores

Dados los vectores $\vec{v} = \langle v_1, v_2, ... v_n \rangle$ y $\vec{w} = \langle w_1, w_2, ... w_n \rangle$, el ángulo θ entre ellos se obtiene a partir del producto punto



$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \|v\| \|w\| Cos\theta$$

Despejando Coseno , se llega a

$$Cos\theta = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|v\| \|w\|}$$

VECTORES PERPENDICULARES U ORTOGONALES

Los vectores son perpendiculares si el ángulo que forman entre ellos es de 90 grados, luego reemplazando en el producto escalar se tiene

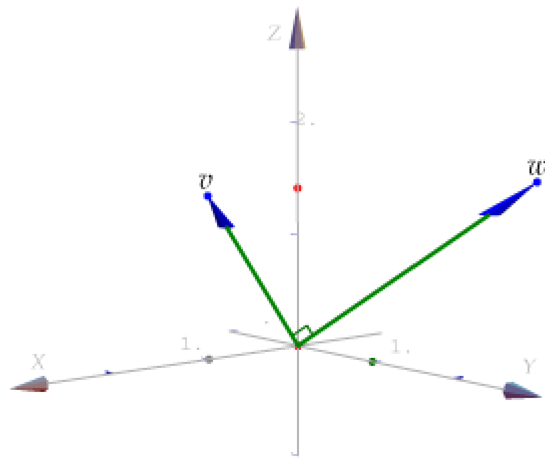
$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \|v\| \|w\| Cos90$$

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \|v\| \|w\| (0)$$

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = 0$$

EJEMPLO 4
i.)

Sean $\vec{w} = \langle 1,0,3 \rangle$ y $\vec{v} = \langle -6,1,2 \rangle$ entonces $\vec{w}$ y $\vec{v}$ son ortogonales pues $\vec{v} \bullet \vec{w} = 1(-6) + 0(1) + 3(2) = -6 + 0 + 6 = 0$



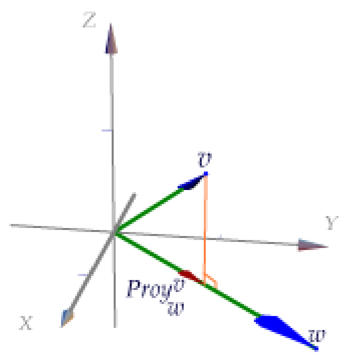
Paralelismo, perpendicularidad, cosenos directores.

Dados los vectores $\vec{v} = \langle v_1, v_2, \ldots.. v_n \rangle$ y $\vec{w} = \langle w_1, w_2, \ldots.. w_n \rangle$, se dice que

A) Los vectores son perpendiculares si se cumple que el producto punto sea igual a cero
B) Los vectores son paralelos es uno es un múltiplo escalar del otro, es decir existe un escalar k , de tal manera que $\vec{v} = k\vec{w}$

Proyección ortogonal

Geométricamente lo que queremos es determinar el vector que se obtiene al proyectar ortogonalmente el vector $\vec{u} \neq 0$ sobre el vector $\vec{w}$ denotado por $proy_w u$.



Se define como

$$\Pr oy_w u = \left(\frac{u \cdot w}{w \cdot w}\right)\vec{w}$$

- Al vector $\vec{u} - \Pr oy_{\vec{w}} \vec{u}$ se le conoce como la componente de $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{w}$.

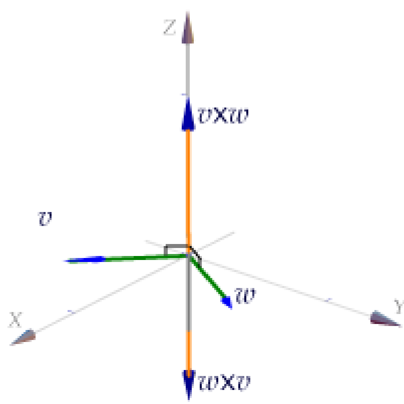
Producto Cruz en $\mathbb{R}^3$

El producto cruz entre dos vectores de $\mathbb{R}^3$ se define de la siguiente manera

Dados los vectores $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ y $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$, se define el producto cruz o producto vectorial $\vec{v} \times \vec{w}$ como el vector que resulta del desarrollo del determinante

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

El vector producto vectorial $\vec{v} \times \vec{w}$ es un vector que es perpendicular a cada uno de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$



Sean $\vec{v} = \langle -2,3,4 \rangle$ y $\vec{w} = \langle 2,-2,3 \rangle$ entonces

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} k$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = 29i + 14j + 4k$$

Propiedades del producto cruz

Consideremos los vectores $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in R^n$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$*, entonces*

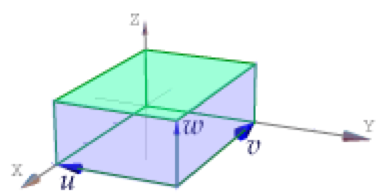
1. $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$
2. $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$
3. $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \, \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ (igualdad d Lagrange)
4. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
5. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
6. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$
7. $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$
8. $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$

$\vec{u} \times \vec{u} = 0$

NOTA:De la propiedad 9 y la propiedad 7 podemos deducir que si dos vectores son paralelos, el producto cruz es cero

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \alpha\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \times \vec{v} = 0$$

1) EL MODULO DEL PRODUCTO VECTORIAL REPRESENTA GEOMETRICAMENTE EL AREA DEL PARALELOGRAMO QUE TIENE POR LADOS LOS VECTORES DADOS.
2) EL VALOR ABSOLUTO DEL TRIPLE PRODUCTO ESCALAR REPRESENTA GEOMETRICAMENTE EL VOLUMEN DEL PARALELEPIPEDO QUE TIENE POR ARISTAS LOS VECTORES DADOS.



$$V = |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})| = \left| Det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \right|$$